ENGLISH

Information about the exam
Read each problem carefully. The maximum number of points you can get on this exam is 100. The maximum number of points each problem can give (perfect score) is indicated in paranthesis. Good luck.

Problem 1 (35 points)
In this course, you have learned about different approximate methods used to obtain the energy levels of quantum mechanical systems. This includes

- Time-independent perturbation theory
- Sudden approximation
- Variational method
- WKB approximation
- Adiabatic approximation

In each of the above cases: explain the key idea behind each method, under which conditions the named method can be used, and when the method is expected to be the most useful. You should use equations as well as text to answer these questions.

Problem 2 (6 points)
Explain in the difference between the dynamical phase and the Berry phase of a wavefunction, preferably using both text and some equations. It is not expected that you have memorized the exact analytical expression for the Berry phase nor its derivation, but you should be able to explain how it is related to the wavefunction.

Problem 3 (9 points)
What is a Landau level and when does it occur? How does the Fermi level E_F at temperature $T = 0$ in a two-dimensional electron gas with an applied out-of-plane magnetic field B behave as a function of B? Explain the physical origin and make a sketch of the E_F vs. B behavior. What is the Shubnikov-de Haas effect and what is its physical origin?

Problem 4 (6 points)
Explain the difference between a wavefunction that is a mixed state and a wavefunction that is a superposition of states. Assume now that we have a system with total angular momentum 1 (in normalized units), described by the density matrix

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

We have here used a basis corresponding to the three eigenvectors of the z-component of the angular momentum, J_z. Does this describe a pure or mixed state and *why*? Let $\mathbf{J}$ be the total angular momentum operator. Next, compute the average value of the z-component of $\mathbf{J}$, represented by $J_z = \mathrm{diag}(1, 0, -1)$ (a diagonal 3×3 matrix with 1, 0, and -1 on the diagonal).

Problem 5 (6 points)
What is flux quantization? How would you demonstrate flux quantization using a superconducting material? What is the Aharonov-Bohm effect? You should use both words and equations to explain.

Problem 6 (7 points)
Give a qualitative argument for why the total scattering cross section σ depends on the forward-scattered part of the scattering amplitude $f(\theta)$, as seen from the optical theorem $\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\{f(0)\}$. For which situations is the Born-approximation for

computing the differential scattering cross section $d\sigma/d\Omega$ expected to be good and when is it expected to fail?

Problem 7 (16 points)
Who developed the matrix mechanics formulation of quantum mechanics in 1925 (even before Schrödinger developed wavemechanics in position space)? Consider now a time-dependent Hamiltonian operator $\hat{H}(\mathbf{r},t) = \hat{H}_0(\mathbf{r}) + \hat{V}(\mathbf{r},t)$ where $\hat{H}_0$ is time-independent. The orthogonal and normalized eigenfunctions of $\hat{H}_0$ are denoted $\psi_n(\mathbf{r})$ with associated eigenvalues E_n. Expand the normalized eigenfunction $\Psi(\mathbf{r},t)$ of this time-dependent Hamiltonian as follows:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_k a_k(t)\psi_k(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t/\hbar}, \tag{2}$$

and then derive an exact equation of motion for the coefficients $a_n(t)$ on the form

$$\frac{da_n(t)}{dt} = \sum_k F_{nk}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_{nk}t}a_k(t) \tag{3}$$

without making any approximations concerning $\hat{V}$. Identify an analytical expression for the quantities $F_{nk}(t)$ and g_{nk}.

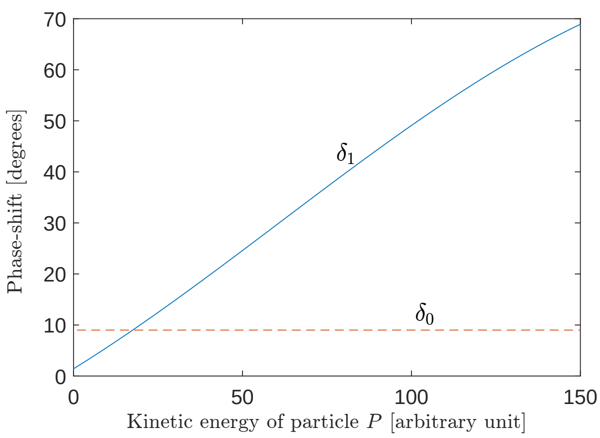
Problem 8 (9 points)
The time-reversal operator T is a so-called antiunitary operator, which means that it satisfies

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{4}$$

for two states $|\alpha\rangle$ and $|\beta\rangle$ where we have defined $|\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle$ and $|\tilde{\beta}\rangle = T|\beta\rangle$. Now, Kramer's degeneracy theorem states that if a Hamiltonian has time-reversal symmetry and ψ is an eigenfunction with eigenvalue E (so that $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$), then $T|\psi\rangle$ is a *distinct* eigenfunction of H with the same eigenvalue E. In other words, in the presence of time-reversal symmetry each energy state of H is doubly degenerate.

Time-reversal symmetry means that the Hamiltonian commutes with T, so that $[H,T] = 0$. Consider now a spin-1/2 particle where it is known that $T^2 = -1$. Your task is to prove analytically Kramer's degeneracy theorem. More specifically, prove that (1) if $|\psi\rangle$ is an eigenfunction of H with eigenvalue E, then $T|\psi\rangle$ is an eigenfunction of H with eigenvalue E and (2) prove that $|\psi\rangle$ and $T|\psi\rangle$ are indeed different states with no overlap. To prove these two points, use the time-reversal symmetry property of the Hamiltonian and the antiunitarity property of T, both described above.

Problem 9 (6 points)
Consider the following graph of the phase-shifts δ_0 and δ_1 for elastic scattering between two particles P and R. Particle R is assumed to be much heavier than P, so that R may be taken to be at rest. Is the force between the particles mainly attractive or repulsive? Explain your answer (merely stating whether it is attractive or repulsive gives zero points).



BOKMÅL

Informasjon om eksamen
Les hvert problem nøye. Det maksimale antallet poenget du kan oppnå er 100. Den maksimale poengsummen som kan oppnås på hver enkelt problem står oppgitt i parenteser. Lykke til.

Problem 1 (35 poeng)
I dette kurset har du lært om ulike approksimasjonsmetoder som brukes til å beregne energi nivåene i kvantemekaniske systemer. Dette inkluderer:

- Tidsuavhengig perturbasjonsteori
- Brå approksimasjon
- Variasjonsmetoden
- WKB approksimasjonen
- Adiabatisk approksimasjon

I hvert av de ovennevnte tilfellene: forklar hovedidéen bak metoden, under hvilke forhold den kan brukes og når du forventer at metoden er mest nyttig. Du bør bruke både likninger og tekst i din besvarelse.

Problem 2 (6 poeng)
Forklar forskjellen mellom dynamisk fase og Berry fase til en bølgefunksjon, helst med å bruke både tekst og likninger. Det er ikke forventet at du husker det eksakte analytiske uttrykket til Berry fasen eller utledningen av denne, men du bør altså kunne forklare hvordan den er relatert til bølgefunksjonen.

Problem 3 (9 poeng)
Hva er et Landau nivå og når opptrer det? Hvordan vil Fermi energien E_F ved temperatur $T = 0$ i en 2D elektron gass oppføre seg som funksjon av et påtrykt magnetisk felt B som peker ortogonalt på 2D planet? Forklar det fysiske opphavet og lag en figur som viser E_F mot B. Hva er Shubnikov-de Haas effekten og hva er dens fysiske opprinnelse?

Problem 4 (6 poeng)
Forklar forskjellen mellom en bølgefunksjon som er i en blandet tilstand (mixed state) og en superposisjon av tilstander. Anta at vi har et system med total dreieimpuls 1 (i normaliserte enheter), beskrevet av en tetthetsmatrise

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Vi har her brukt en basis som tilsvarer de tre egenvektorene til z-komponenten av dreieimpulsen, J_z. Beskriver dette en blandet tilstand eller en ren tilstand (pure state) og *hvorfor*? La $\mathbf{J}$ være operatoren for total dreieimpuls. Beregn forventningsverdien for z-komponenten av $\mathbf{J}$, representert via $J_z = \mathrm{diag}(1,0,-1)$ (en diagonal 3×3 matrise med 1, 0 og -1 langs diagonalen).

Problem 5 (6 poeng)
Hva er fluks kvantisering? Hvordan ville du demonstrert fluks kvantisering ved å bruke et superledende materiale? Hva er Aharonov-Bohm effekten? Du bør bruke både ord og likninger til å forklare.

Problem 6 (7 poeng)
Gi et kvalitativt argument for hvorfor det totale spredningstverrsnittet σ er avhengig av den forover-spredte delen av spredningsamplituden $f(\theta)$, i følge det optiske teorem $\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\{f(0)\}$. I hvilke situasjoner er Born-approksimasjonen et godt valg for å beregne det differensielle spredningstverrsnittet $d\sigma/d\Omega$ og når forventer du at Born-approksimasjonen er dårlig for dette formålet?

Problem 7 (16 poeng)
Hvem utviklet matrisemekanikk formuleringen av kvantemekanikk i 1925 (til og med før Schrödinger utviklet bølgemekanikk formuleringen i posisjonsrommet)? Betrakt nå en tidsavhengig Hamilton-operator $\hat{H}(\mathbf{r},t) = \hat{H}_0(\mathbf{r}) + \hat{V}(\mathbf{r},t)$ hvor $\hat{H}_0$ er tidsuavhengig. De ortogonale og normaliserte egenfunksjonene til $\hat{H}_0$ skriver vi som $\psi_n(\mathbf{r})$ med assosierte egenverdier E_n. Ekspander de normaliserte egenfunksjonene $\Psi(\mathbf{r},t)$ til den tidsavhengige Hamilton-operatoren som følger:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_k a_k(t)\psi_k(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t/\hbar}, \tag{6}$$

og utled deretter en eksakt bevegelseslikning for koeffisientene $a_n(t)$ på formen:

$$\frac{da_n(t)}{dt} = \sum_k F_{nk}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_{nk}t}a_k(t) \tag{7}$$

uten å gjøre noen approksimasjoner med hensyn til $\hat{V}$. Identifiser et analytisk uttrykk for størrelsene $F_{nk}(t)$ og g_{nk}.

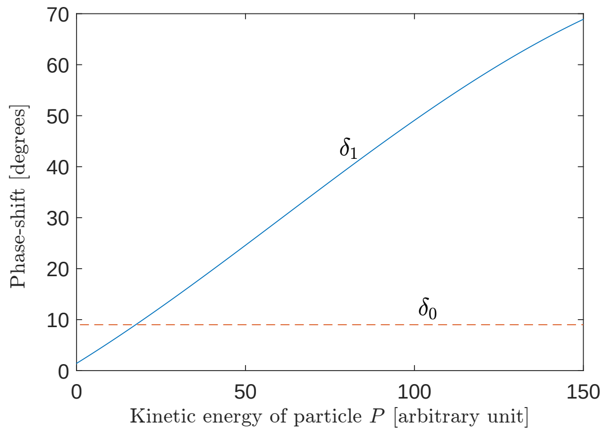
Problem 8 (9 poeng)
Tidsinversjons operatoren T er en såkalt anti-unitær operator, hvilket betyr at den tilfredsstiller

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{8}$$

for to tilstander $|\alpha\rangle$ og $|\beta\rangle$ hvor vi har definert $|\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle$ og $|\tilde{\beta}\rangle = T|\beta\rangle$. Nå er det slik at Kramer's degenerasjons teorem sier at dersom en Hamilton-operator har tidsinversjons symmetri og ψ er en egenfunksjon med egenverdi E (slik at $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$), så er $T|\psi\rangle$ en *distinkt* egenfunksjon til H med samme egenverdi E. Med andre ord, når tidsinversjons symmetri er tilstede så er hver energitilstand til H dobbelt degenerert.

Tidsinversjons symmetri betyr at Hamilton operatoren kommuterer med T, slik at $[H,T] = 0$. Betrakt nå en spin-1/2 partikkel hvor det er kjent at $T^2 = -1$. Din oppgave er å bevise Kramer's degenerasjons teorem analytisk. Mer spesifikt: bevis at (1) dersom $|\psi\rangle$ er en egentilstand til H med egenverdi E, så er $T|\psi\rangle$ en egentilstand til H med egenverdi E og (2) bevis at $|\psi\rangle$ og $T|\psi\rangle$ virkelig er to forskjellige tilstander med null overlapp. For å bevise disse to punktene, så kan du bruke tidsinversjons symmetri egenskapen til Hamilton-operatoren og den anti-unitære egenskapen til T (begge er beskrevet ovenfor).

Problem 9 (6 poeng)
Betrakt følgende figur som viser faseskiftene δ_0 og δ_1 for elastisk spredning mellom to partikler P og R. Partikkel R er antatt å være mye tyngre enn P, slik at vi kan betrakte P som stillestående. Er kraften mellom partiklene hovedsaklig attraktiv eller repulsiv? Forklar ditt svar (å kun svare at den er attraktiv eller repulsiv gir null poeng).



NYNORSK

Informasjon om eksamen
Les kvart problem nøye. Den maksimale mengda poeng du kan oppnå er 100. Den maksimale poengsummen som kan oppnåast på kvart enkelt problem står oppgitt i parentesar. Lykke til.

Problem 1 (35 poeng)
I dette kurset har du lært om ulike approksimasjonsmetodar som vert brukt til å berekna energi nivåa i kvantemekaniske system. Dette inkluderer:

- Tidsuavhengig perturbasjonsteori
- Brå approksimasjon
- Variasjonsmetoden
- WKB approksimasjonen
- Adiabatisk approksimasjon

I kvart av dei ovannemnde tilfella: forklar hovedidéen bak metoden, under kva for tilhøve som han kan brukast, og når du forventar at metoden er mest nyttig. Du bør bruka både likningar og tekst i ditt svar.

Problem 2 (6 poeng)
Forklar skilnaden mellom dynamisk fase og Berry fase til ein bølgjefunksjon, helst med å bruka både tekst og likningar. Det er ikkje forventa at du hugsar det eksakte analytiske uttrykket til Berry fasen eller utrekningen av denne, men du bør altså kunna forklara korleis han er relatert til bølgjefunksjonen.

Problem 3 (9 poeng)
Kva er eit Landau nivå og når opptrer det? Korleis vil Fermi energien E_F ved temperatur $T = 0$ i ein 2D elektron gass oppføra seg som funksjon av eit ytre magnetisk felt B som peikar ortogonalt på 2D planet? Forklar det fysiske opphavet og lag ein figur som viser E_F mot B. Kva er Shubnikov-de Haas effekten og kva er det fysiske opphavet dens?

Problem 4 (6 poeng)
Forklar skilnaden mellom ein bølgjefunksjon som er i ein blanda tilstand (mixed state) og ein suparposisjon av tilstandar. Anta at vi har eit system med total dreieimpuls 1 (normalisert), skildra av ein tetthetsmatrise

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Vi har her brukt ein basis som tilsvarer dei tre eigenvektorene til z-komponenten av dreieimpulsen, J_z. Skildrar dette ein blanda tilstand eller ein rein tilstand (pure state) og *kvifor*? La $\mathbf{J}$ vera operatoren for total dreieimpuls. Berekn forventingverdien for z-komponenten av $\mathbf{J}$, representert via $J_z = \mathrm{diag}(1, 0, -1)$ (ein diagonal 3×3 matrise med 1, 0 og -1 langs diagonalen).

Problem 5 (6 poeng)
Kva er fluks kvantisering? Korleis ville du demonstrert fluks kvantisering ved å bruka eit superledende material? Kva er Aharonov-Bohm effekten? Du bør bruka både ord og likningar til å forklara.

Problem 6 (7 poeng)
Gje eit kvalitativt argument for kvifor det totale spreiingstverrsnittet σ er avhengig av han framover-spreidde delen av amplituden $f(\theta)$ til spreiinga, i følgje det optiske teorem $\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\{f(0)\}$. I kva for situasjonar er Born-approksimasjonen eit godt val for å berekna det differensielle spreiingstverrsnittet $d\sigma/d\Omega$, og når forventar du at Born-approksimasjonen er dårleg for dette føremålet?

Problem 7 (16 poeng)
Kven utvikla matrisemekanikk formuleringen av kvantemekanikk i 1925 (til og med før Schrödinger utvikla bølgjemekanikk formuleringen i posisjonsrommet)? Vurder no ein tidsavhengig Hamilton-operator $\hat{H}(\mathbf{r},t) = \hat{H}_0(\mathbf{r}) + \hat{V}(\mathbf{r},t)$ der $\hat{H}_0$ er tidsuavhengig. Dei ortogonale og normaliserte eigenfunksjonene til $\hat{H}_0$ skriv vi som $\psi_n(\mathbf{r})$ med assosierte eigenverdier E_n. Ekspander dei normaliserte eigenfunksjonene $\Psi(\mathbf{r},t)$ til den tidsavhengige Hamilton-operatoren som følgjer:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_k a_k(t)\psi_k(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k t/\hbar}, \tag{10}$$

og rekn deretter ut ei eksakt rørslelikning for koeffisientane $a_n(t)$ på forma:

$$\frac{da_n(t)}{dt} = \sum_k F_{nk}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_{nk}t}a_k(t) \tag{11}$$

utan å gjera nokre approksimasjonar med omsyn til $\hat{V}$. Identifiser eit analytisk uttrykk for storleikane $F_{nk}(t)$ og g_{nk}.

Problem 8 (9 poeng)
Tidsinversjons operatoren T er ein såkalt anti-unitær operator, som tyder at han tilfredsstiller

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{12}$$

for to tilstandar $|\alpha\rangle$ og $|\beta\rangle$ der vi har definert $|\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle$ og $|\tilde{\beta}\rangle = T|\beta\rangle$. No er det slik at Kramer's teoremet til degenerasjon seier at dersom ein Hamilton-operator har tidsinversjons symmetri og ψ er ein eigenfunksjon med eigenverdi E (slik at $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$), så er $T|\psi\rangle$ ein *distinkt* eigenfunksjon til H med same eigenverdi E. Med andre ord, når tidsinversjons symmetri er tilstades så er kvar energitilstand E til H dobbelt degenerert.

Tidsinversjons symmetri tyder at Hamilton operatoren kommuterer med T, slik at $[H,T] = 0$. Vurder no ein spin-1/2 partikkel der det er kjent at $T^2 = -1$. Oppgåva di er å bevisa Kramer's teoremet til degenerasjon analytisk. Meir spesifikt: bevis at (1) dersom $|\psi\rangle$ er ein eigentilstand til H med eigenverdi E, så er $T|\psi\rangle$ ein eigentilstand til H med eigenverdi E og (2) bevis at $|\psi\rangle$ og $T|\psi\rangle$ verkeleg er to ulike tilstandar med null overlapp. For å bevisa desse to punkta, så kan du bruka tidsinversjons symmetri eigenskapen til Hamilton-operatoren og den anti-unitære eigenskapen til T (begge er skildra ovanfor).

Problem 9 (6 poeng)
Vurder følgjande figur som viser faseskifta δ_0 og δ_1 for elastisk spreiing mellom to partiklar P og R. Partikkel R er anteken å vera mykje tyngre enn P, slik at vi kan vurdera P som i ro. Er krafta mellom partiklane hovedsaklig attraktiv eller repulsiv? Forklar svaret ditt (å berre svara at han er attraktiv eller repulsiv gjev null poeng).