Kap. 23
Elektrisk potensial

Skal definere på grunnlag av elektrisk felt ***E:***

- Elektrisk potensiell energi, *U*
- Elektrisk potensial, *V*
  - (*Kretsteknikk: El. potensialforskjell = spenning*)
- Potensialgradient og elektrisk felt.
- Ekvipotensialflater

Gravitasjon (punktmasser):

Kraft: $$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$ (alltid negativ)

Pot.energi: $$U(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$ (alltid negativ)

Elektrisitet (punktladninger):

Kraft: $$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \quad \text{(Coul)}$$ (pos/neg)

Pot.energi: $$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$ (pos/neg)

Skal utlede *U(**r**)*

Kap. 23. Elektrisk potensial

- Elektrisk potensiell energi, *U*

Definisjon: $$U_\mathrm{b} - U_\mathrm{a} = -W_\mathrm{ab} = -q_0 \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (23.2)$$

Rundt pkt.ladning: $$U_\mathrm{b} - U_\mathrm{a} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_\mathrm{b}} - \frac{1}{r_\mathrm{a}}\right) \qquad (23.8)$$

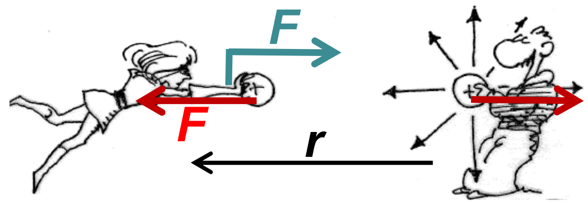
Rundt pkt.ladning, relativt $r_\mathrm{a} = \infty$: $$U(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad (23.9)$$

a = b: *E*-feltet er konservativt:
(arbeid uavhengig vegen)

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

Eks. 1, forts. av:
Hvor stor er 1 coulomb ?

- Du og din kamerat/vennine holder hver ei kule med ladning +1,0 C. Dere beveger dere mot hverandre fra uendelig i et ellers elektrisk nøytralt rom
- a) Hvor nærme kan dere komme hverandre?
  Anta dere kan trykke med *F* = 500 N hver. (Svar: 4,2 km)
- b) Hvor stort er det elektriske feltet i avstand 4,2 km? (Svar: 500 N/C)
- c) Hvor mye arbeid for å føre dere sammen fra *a*=∞ til *b*=4,2 km? (anta en av dere står i ro)



Arbeid av elektrisk kraft ***F***:

$$W = \int_{\infty}^{b} q_1 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = q_1 k q_2 \int_{\infty}^{b} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \text{-}9\cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}\ \cdot (1\mathrm{C})^2 \left(\frac{1}{4{,}2\ \mathrm{km}} - \frac{1}{\infty}\right) = \text{-}2{,}1\ \mathrm{MJ}$$

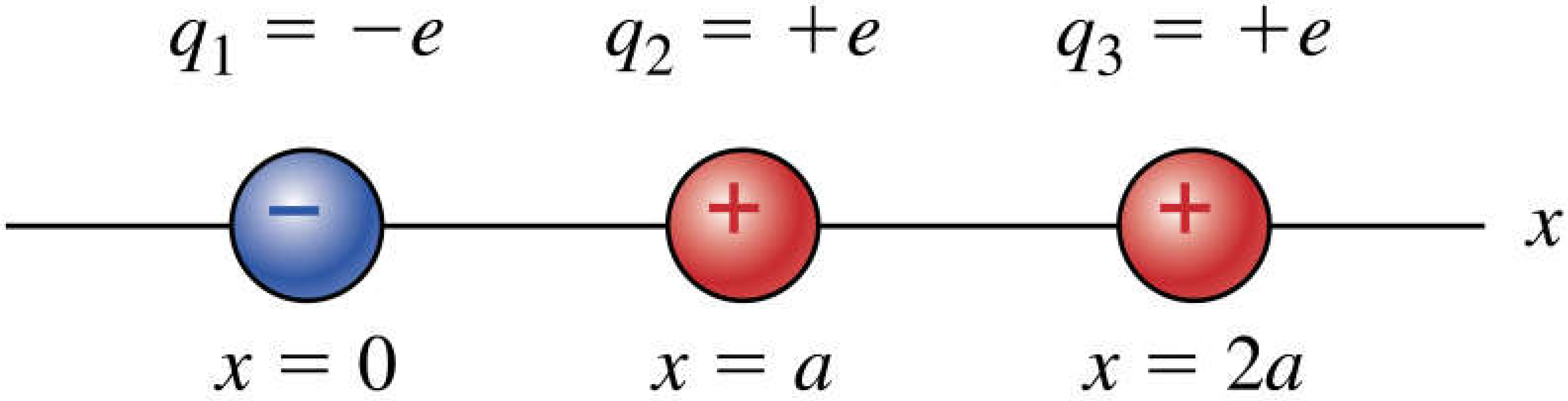
eller enklere fra

$$W = -U(b) = -k\, q_0 q \frac{1}{b} = -9\cdot 10^9 \mathrm{Nm^2/C^2}\cdot (1\mathrm{C})^2 \cdot \frac{1}{4{,}2\,\mathrm{km}} = -2{,}1\ \mathrm{MJ}$$

«Vårt» arbeid = - arbeid av ***F*** = $\underline{-\ W = +\,2{,}1\ \mathrm{MJ}}$

(som å løfte 100 kg 2,2 km opp, eller ca. ¼ av kroppens energibruk per dag)

Eks. 2 ≈ Y&F Ex. 23.2
To og tre punktladninger



a) Finn potensiell energi til q_1 og q_2 (relativt ∞)

b) Finn nødvendig arbeid for å plassere q_3

= potensiell energi for q_3 (i naboskap av q_1 og q_2)

c) Finn total potensiell energi

Elektrisk potensial V (= U/q_0) :

Relativt potensial, fra def. av pot.en:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (23.17)$$

Absolutt potensial (relativt ∞):

rundt én punktladning:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (23.14)$$

rundt mange punktladninger:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.15)$$

rundt kontinuerlig ladninger:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{dq}{r} \qquad (23.16)$$

Eks. 3, forts. av: Hvor stor er 1 coulomb ?

- Du og din kamerat/vennine holder hver ei kule med ladning +1,0 C. Dere beveger dere mot hverandre fra uendelig i et ellers elektrisk nøytralt rom
- a) Hvor nærme kan dere komme hverandre?
  Anta dere kan trykke med F = 500 N hver. (Svar: 4,2 km)
- b) Hvor stort er det elektriske feltet i avstand 4,2 km? (Sv: 500 N/C)
- c) Hvor mye arbeid for å føre dere sammen fra $a=\infty$ til b=4,2 km? (anta en av dere står i ro) (Sv: 2,1 MJ)
- d) Hva er potensialforskjellen mellom dere (ved b=4,2 km) ?

Enklest, fra utregnet arbeid i pkt c):

$$V = W/q_2 = 2{,}1\text{ MJ} / 1{,}0\text{ C} = \underline{2{,}1\text{ MV}}$$

Eller fra potensial $V(r)$ rundt punktladning:

$$V(r) = k\, q_1 / r$$
$$= 9{,}0\cdot 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 1{,}0\text{ C} / 4{,}24\text{ km} = 2{,}12\text{ MV} = \underline{2{,}1\text{ MV}}$$

Beregning av potensial:

Metode 1, Superposisjon av punktladninger (V rel. ∞):

diskrete ladninger: $$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.15)$$

kontinuerlig ladninger: $$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r} \qquad (23.16)$$

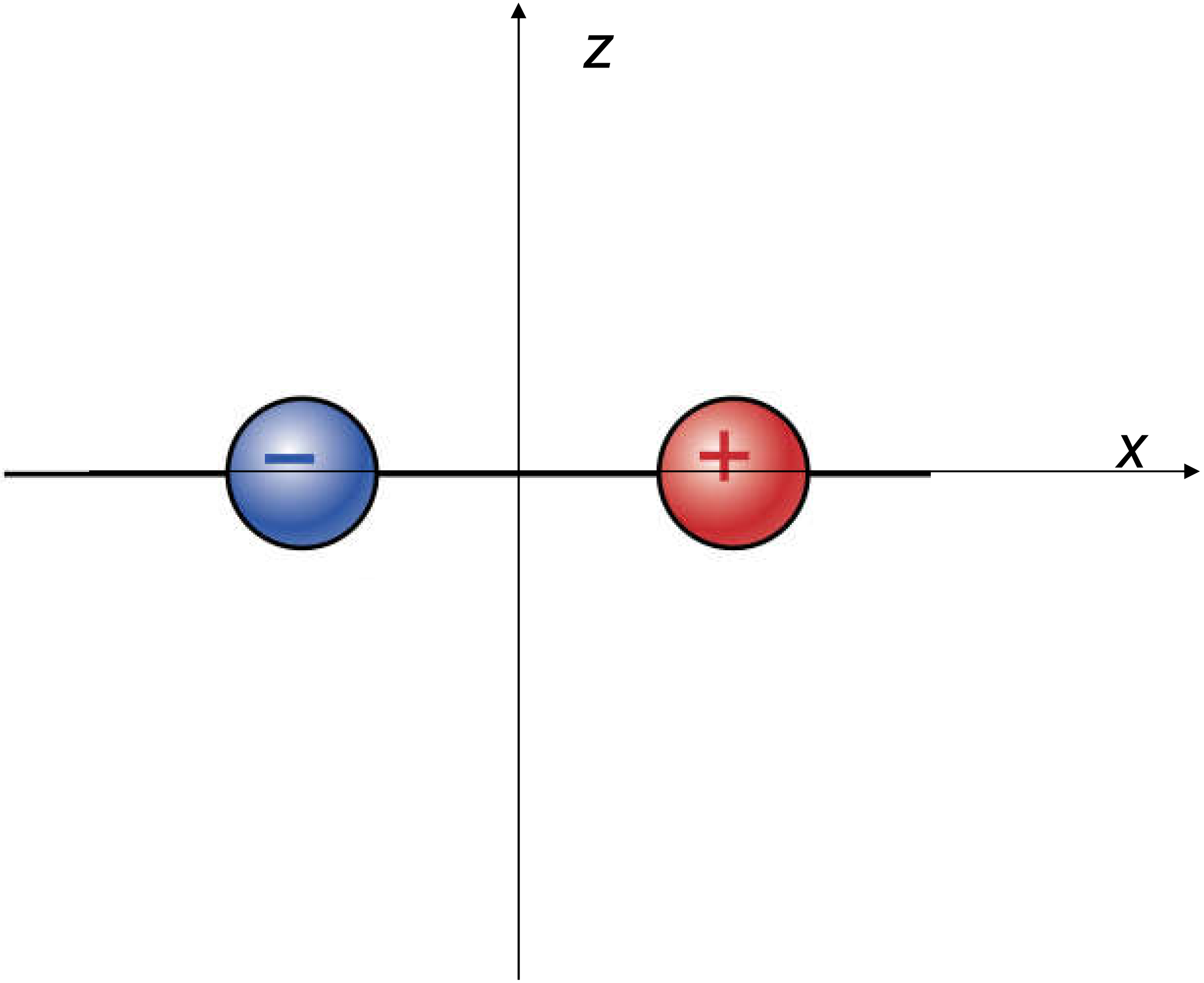
$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = V(\vec{r}_\mathrm{b}) - V(\vec{r}_\mathrm{a})$$

Metode 2: Fra definisjonen, når ***E*** er kjent:

$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = -\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (23.17)$$

Eks. 4: V rundt dipol (mer i øving 4)

Finn potensial V (relativt uendelig) rundt dipol



Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

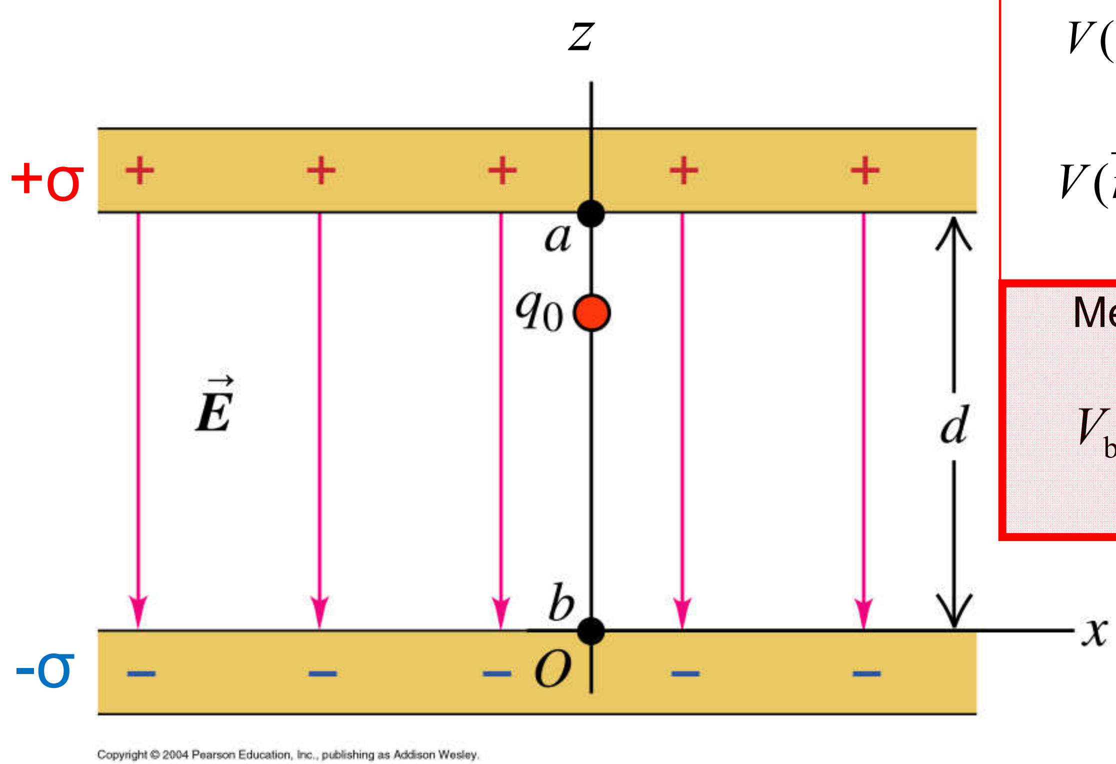
Metode 2:

$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = -\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Eks.5: V mellom to (uendelige) parallellplater (Y&F Ex. 23.9)

E fra tidligere:

$$E = \sigma/\varepsilon_0$$



(Y&F Fig 23.18)

Metode 1:

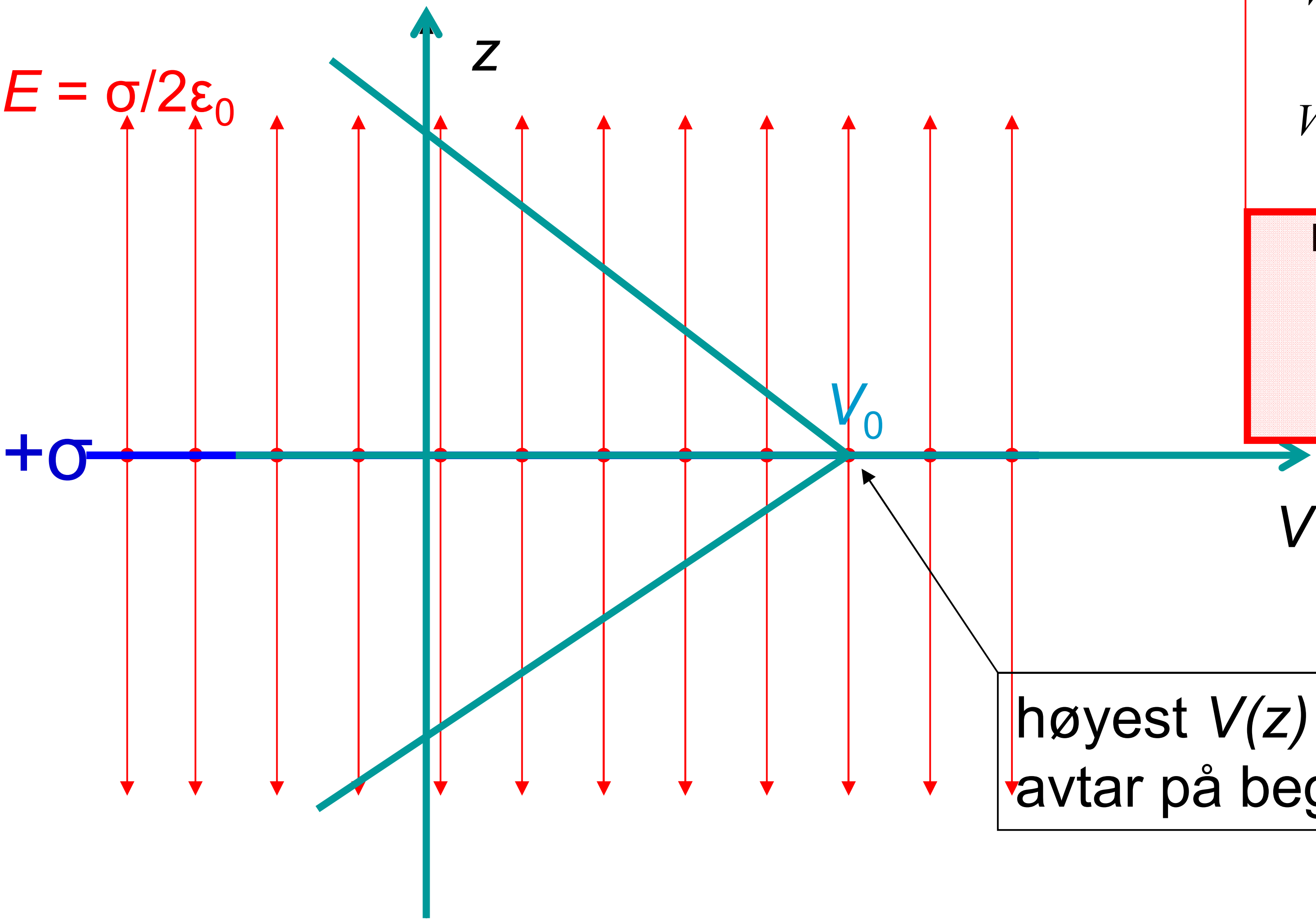
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Eks 5B: Flateladning



Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

Metode 2:

$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = -\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

høyest *V(z)* på plata,
avtar på begge sider

Eks.6: *V* inni og utenfor ladd lederkule (Y&F Ex. 23.8)

E fra Eks.3 i kap 22 (Ex. 22.5):

Met. 1:
Eks. 6B:
Notat på websidene

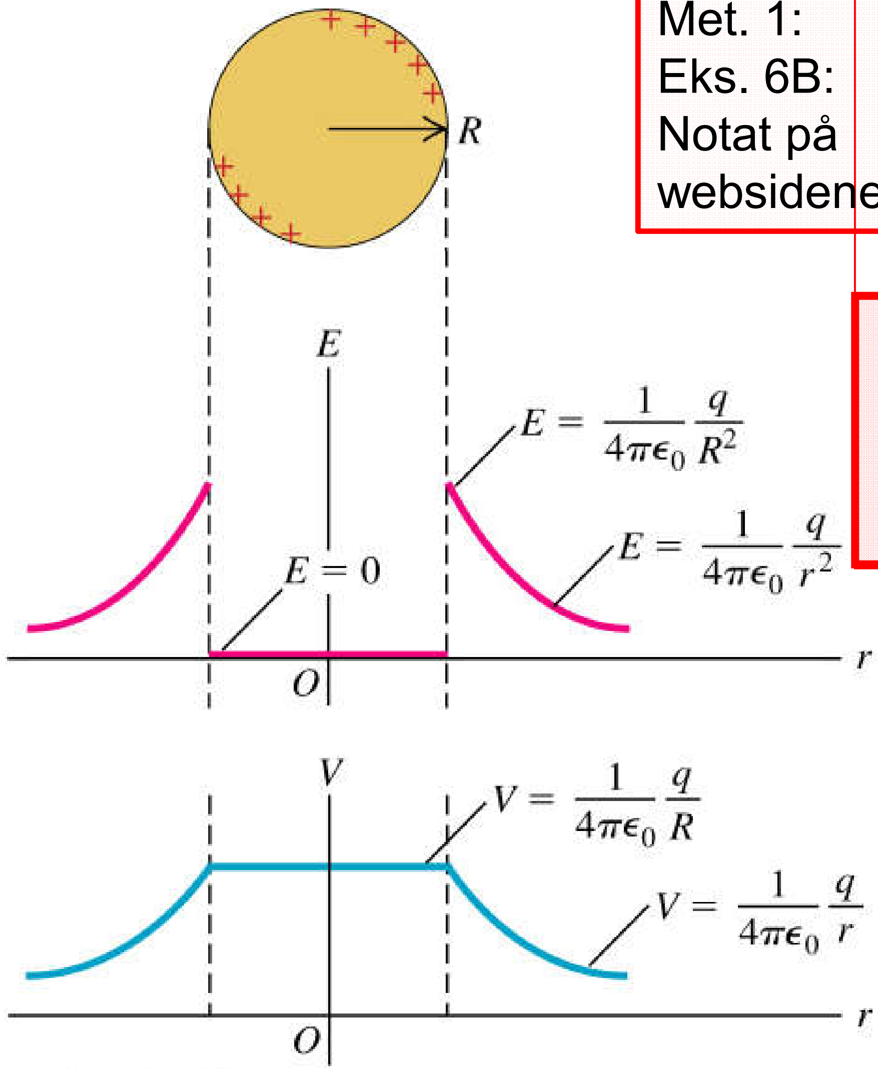
Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

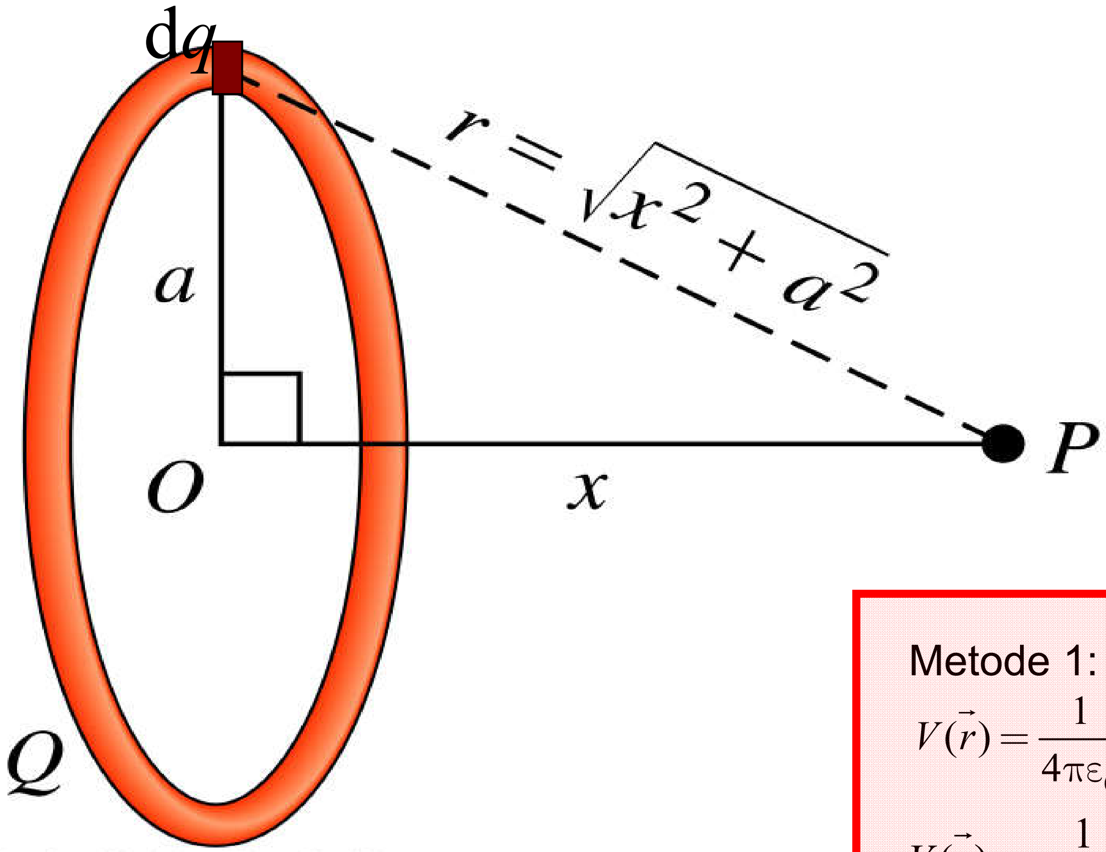
Metode 2:

$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = -\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



(Y&F Fig 23.16)

Eks.7: V på aksen til tynn ring (Y&F Ex. 23.11)



(Y&F Fig 23.20)

Metode 1

fordi:
Vanskeligere å finne $E(x)$ (Eks. 4 kap 21) enn å finne $V(x)$

Resultat:
$V(x) = k\,Q\,/\,r$

Eks. 4 kap 21:
$E_x = k\,Q\,x\,/\,r^3 \quad (21.8)$

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

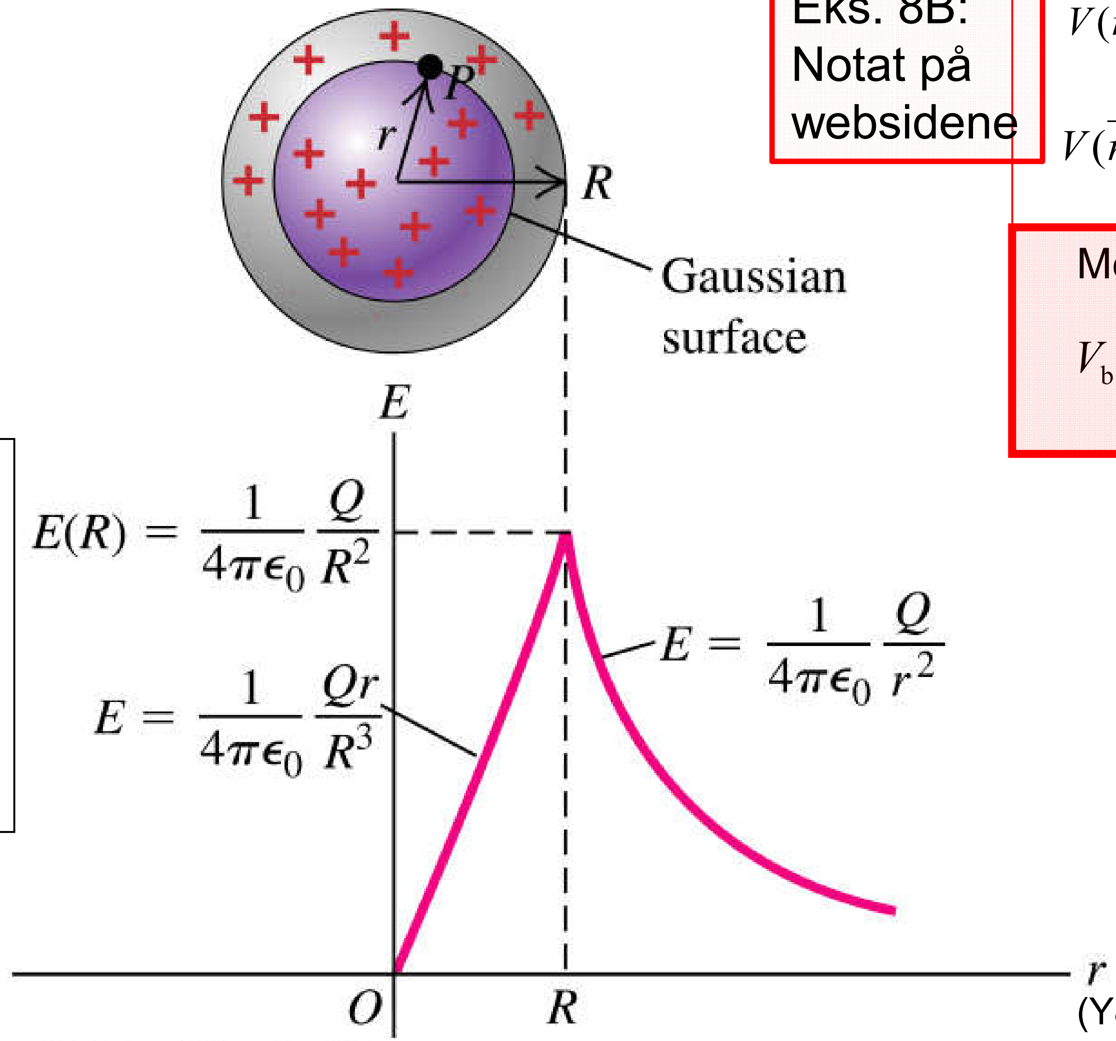
Metode 2:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Eks.8: *V* inni og utenfor uniformt ladd kule

Metode 2

E fra Eks.1 i kap 22 (Ex. 22.9):



(Y&F Fig 22.22)

Met. 1:
Eks. 8B:
Notat på websidene

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

Metode 2:

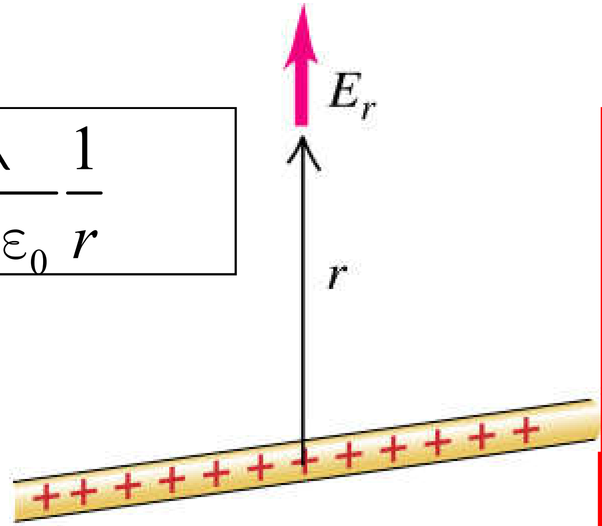
$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = -\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Eksempler
i forelesning (Eks…), Y&F Ed13 (Ex…), og Lillestøl (L…)

	Kap 21. *E*-felt	Kap 22. Gauss lov	Kap 23. Potensial
Dipol	Eks. 2 Ex. 21.8+21.14 L19.6		Eks. 4 Ex. 23.4 Met 1
Linjeladning endelig	Eks. 3 Ex. 21.10		Ex. 23.12
Linjeladning uendelig	(Eks. 3) L19.7	Eks. 5 Ex. 22.6, L19.13	Eks. 9 Ex. 23.10
Tynn ring	Eks. 4 Ex. 21.9		Eks. 7 Ex. 23.11 Met 1 Met 2: Eks. 7B
Sirkulær plate	Eks. 5 Ex. 21.11		
Uendelig plate	Eks. 6 Ex. 21.11 L19.9	Eks. 2 Ex. 22.7 L19.14	Eks. 5B L19.15 Met 2
Parallellplater	Ex. 21.12 Eks. 7	Ex. 22.8	Eks. 5 Ex. 23.9 Met 2
Kule med homogen ladning		Eks. 1 Ex. 22.9, L19.12	Eks. 8 L19.19 Met 2
Lederkule		Eks. 3 Ex. 22.5	Eks. 6 Ex. 23.8 Met 2 Met 1: Eks. 6B

Eks.9: *V* rundt uendelig lang linjeladning (Y&F Ex 23.10)

E fra Eks.5,kap.22 (Ex.22.6): $E_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$



Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

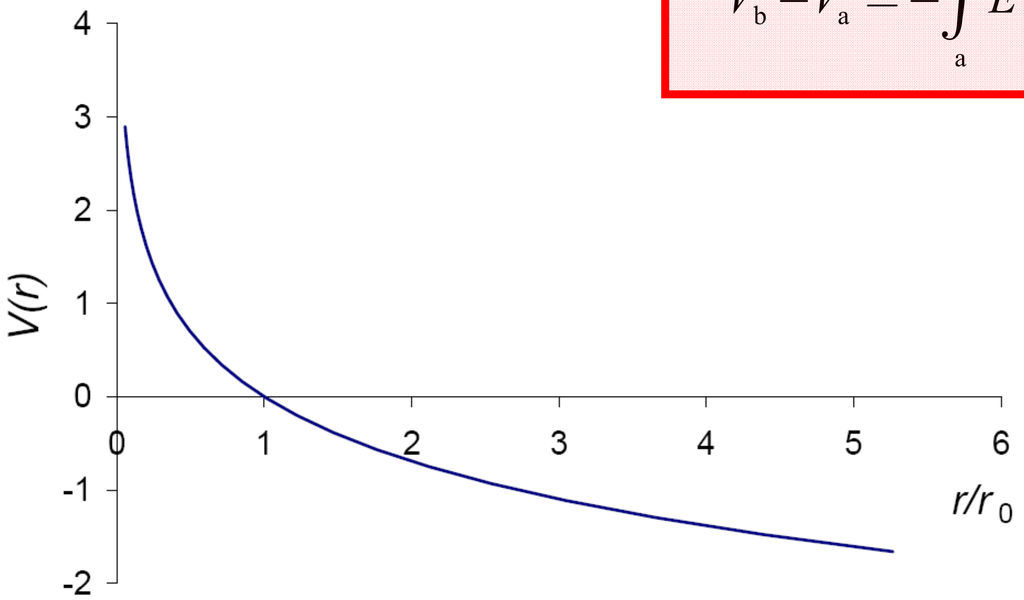
Metode 2:

$$V_\mathrm{b} - V_\mathrm{a} = -\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Metode 2

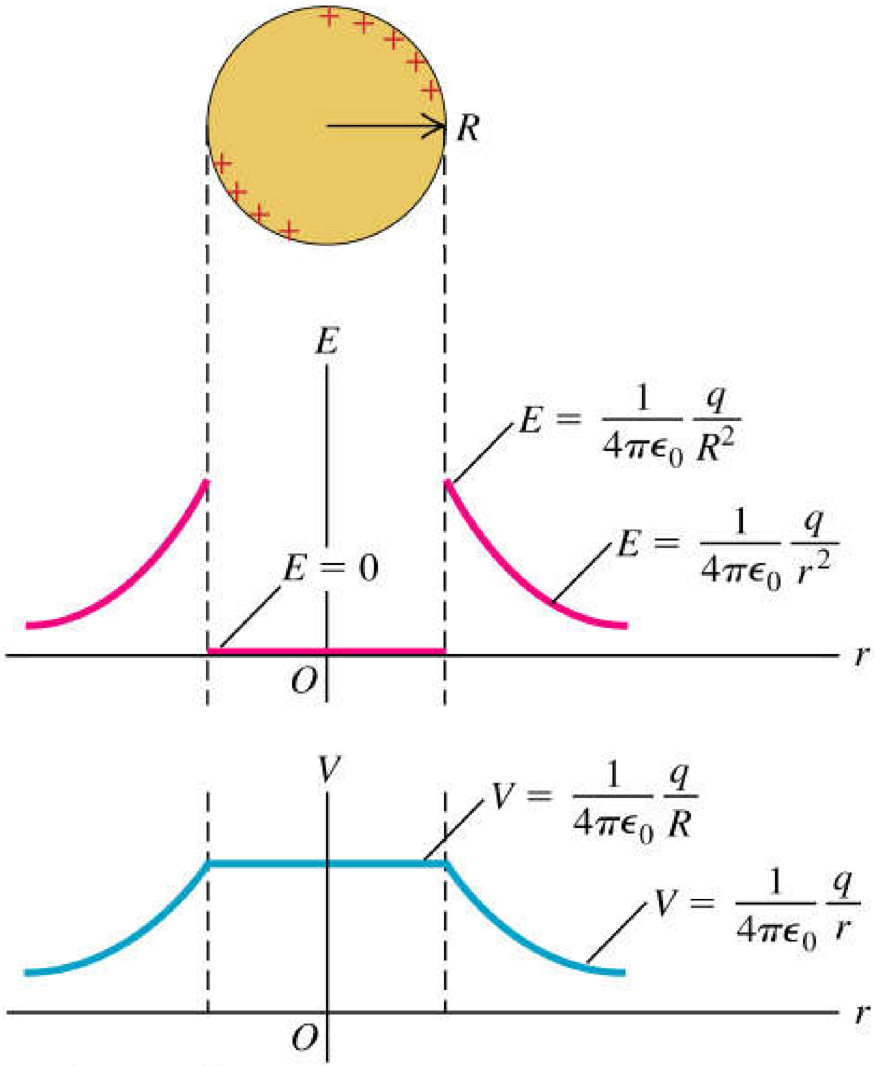
$$V(r) - V(r_0)$$

$$= -\int_{r_0}^{r} E_r \mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$



Referansepunkt r_0:
∞ og 0 er begge ubrukelige.

Eks.6: *V* inni og utenfor ladet lederkule (Y&F Ex. 23.8)



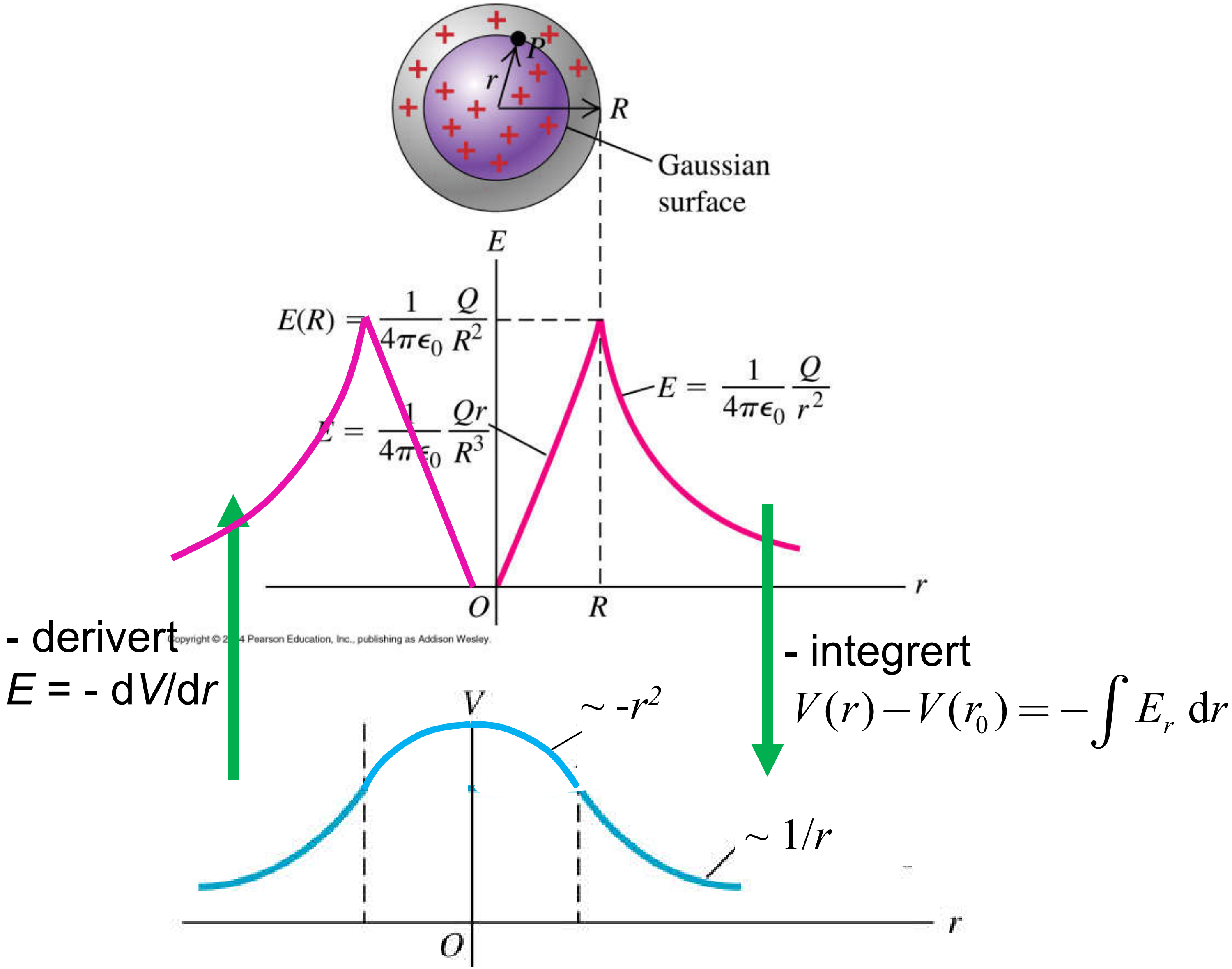
- derivert
E = -d*V*/d*r*

- integrert

$$V(r) - V(r_0) = -\int E_r \, \mathrm{d}r$$

(Y&F Fig 23.16)

Eks.8: *V* inni og utenfor uniformt ladd kule



(Y&F ≈Fig 22.22)

Gradienten til en skalar er en vektor:
(fra formelsamling s. 2):

Kartesiske koord:

$$\mathrm{grad}V = \vec{\nabla}V = \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}$$

Sylinderkoord:

$$\vec{\nabla}V = \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}$$

Kulekoord:

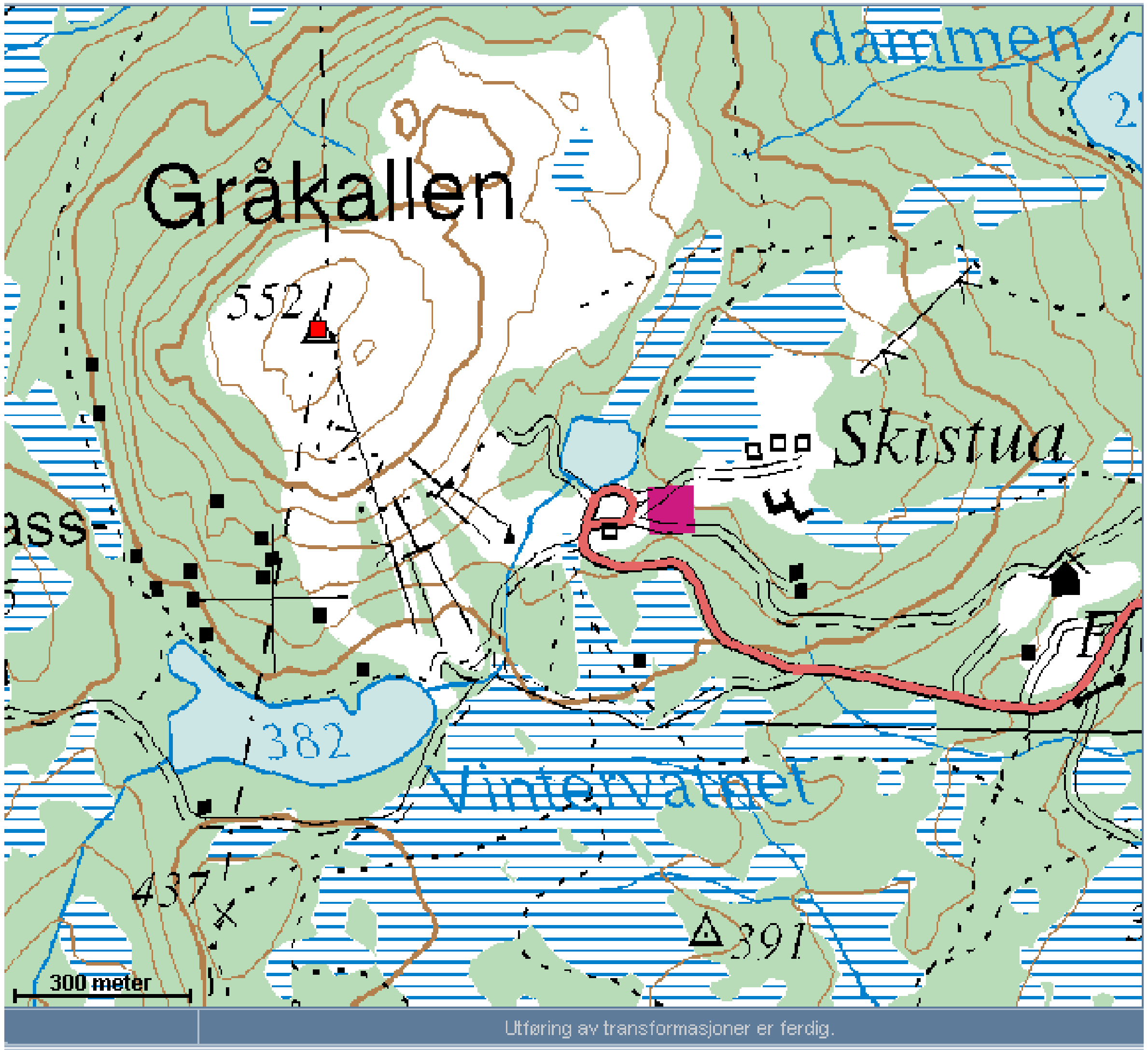
$$\vec{\nabla}V = \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Ekvipotensialflater

= flater med innbyrdes konstant potensial.

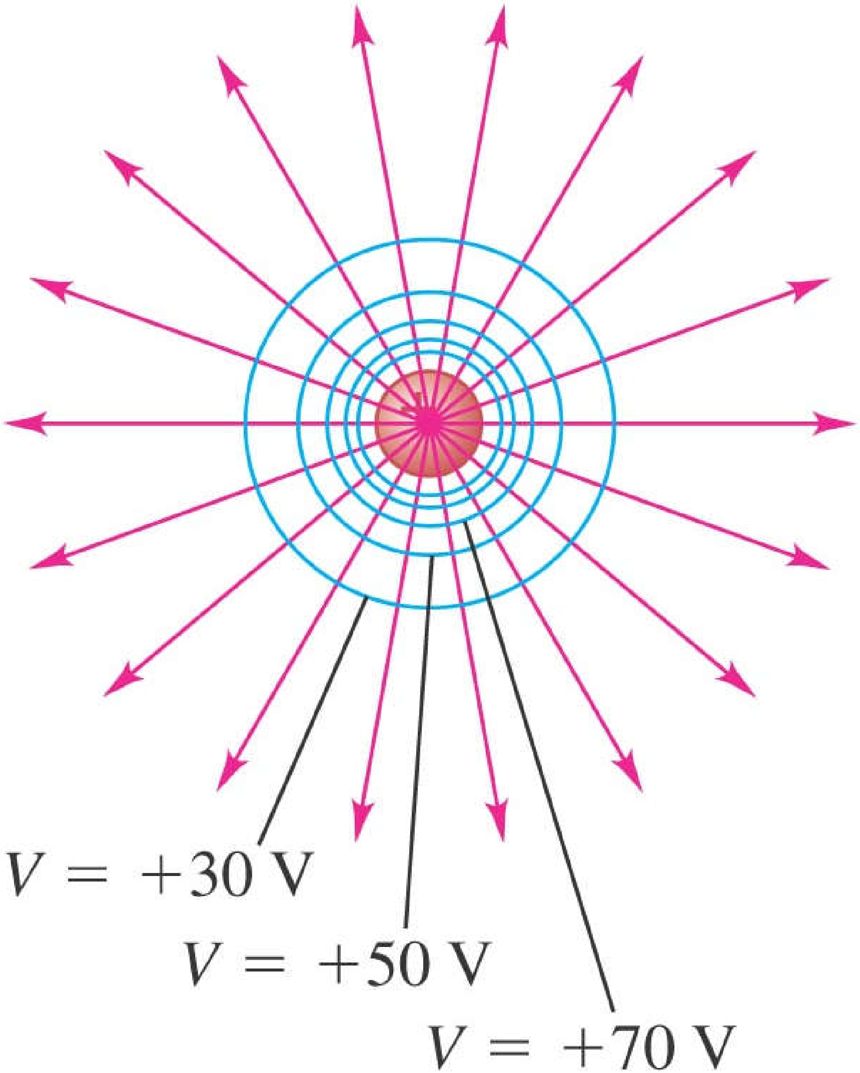
Gravitasjonen har også ekvipotensialflater.

Høydekoter på kart er skjæring mellom epf. og terrenget:



Ekvidistanse:
Δh = 20 m
(grav.potensial:
$\Delta V = \Delta g h$)

Punktladning



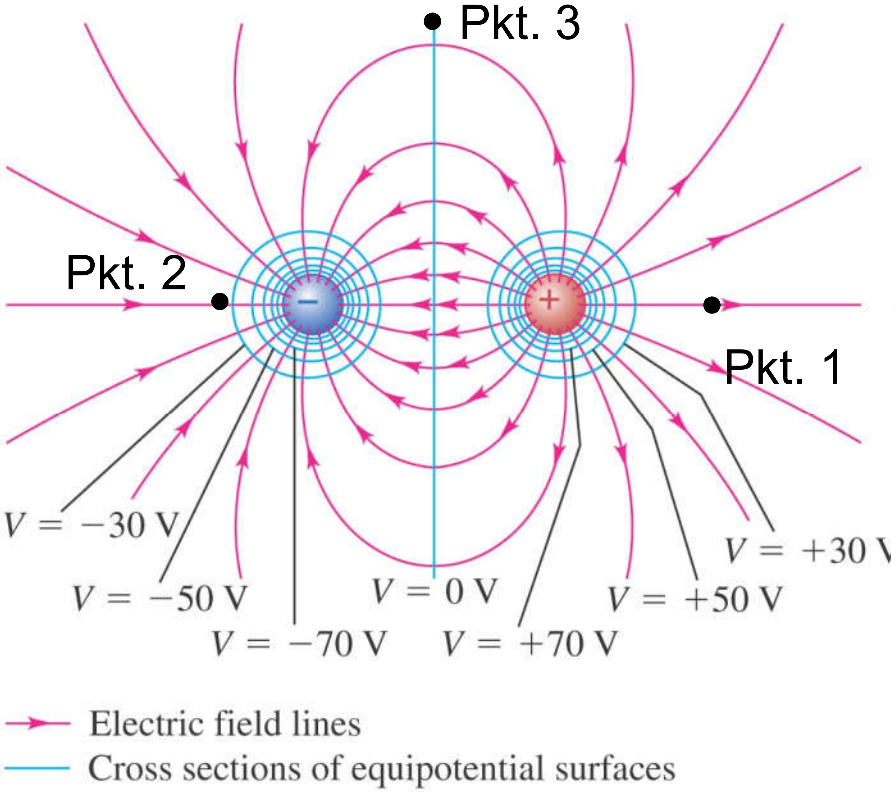
Ekvipotensialflater blå, ekvidistanse ΔV = 20 V.

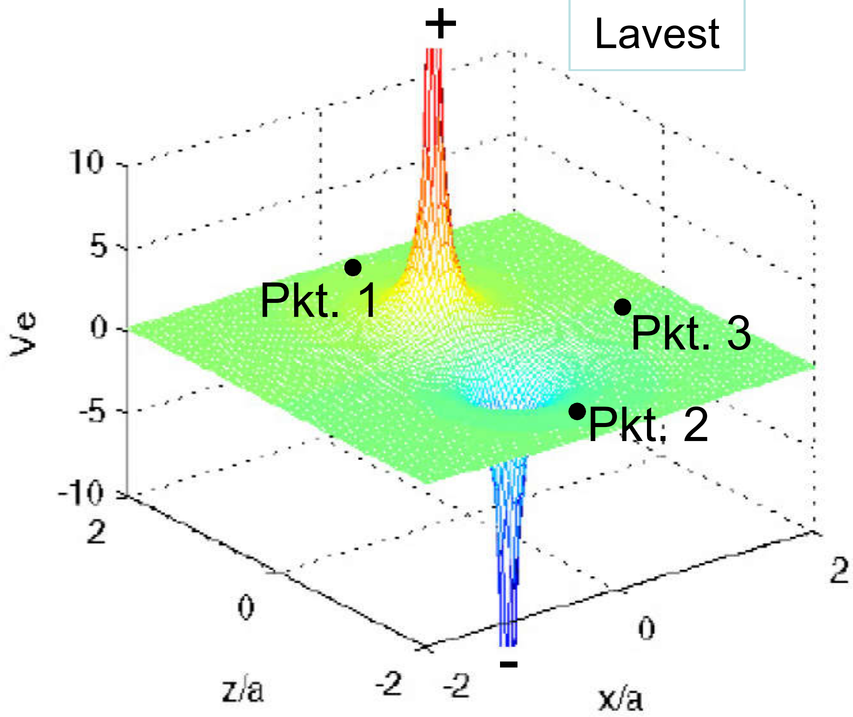
Feltlinjer røde.

(Y&F Fig 23.23)

Dipol

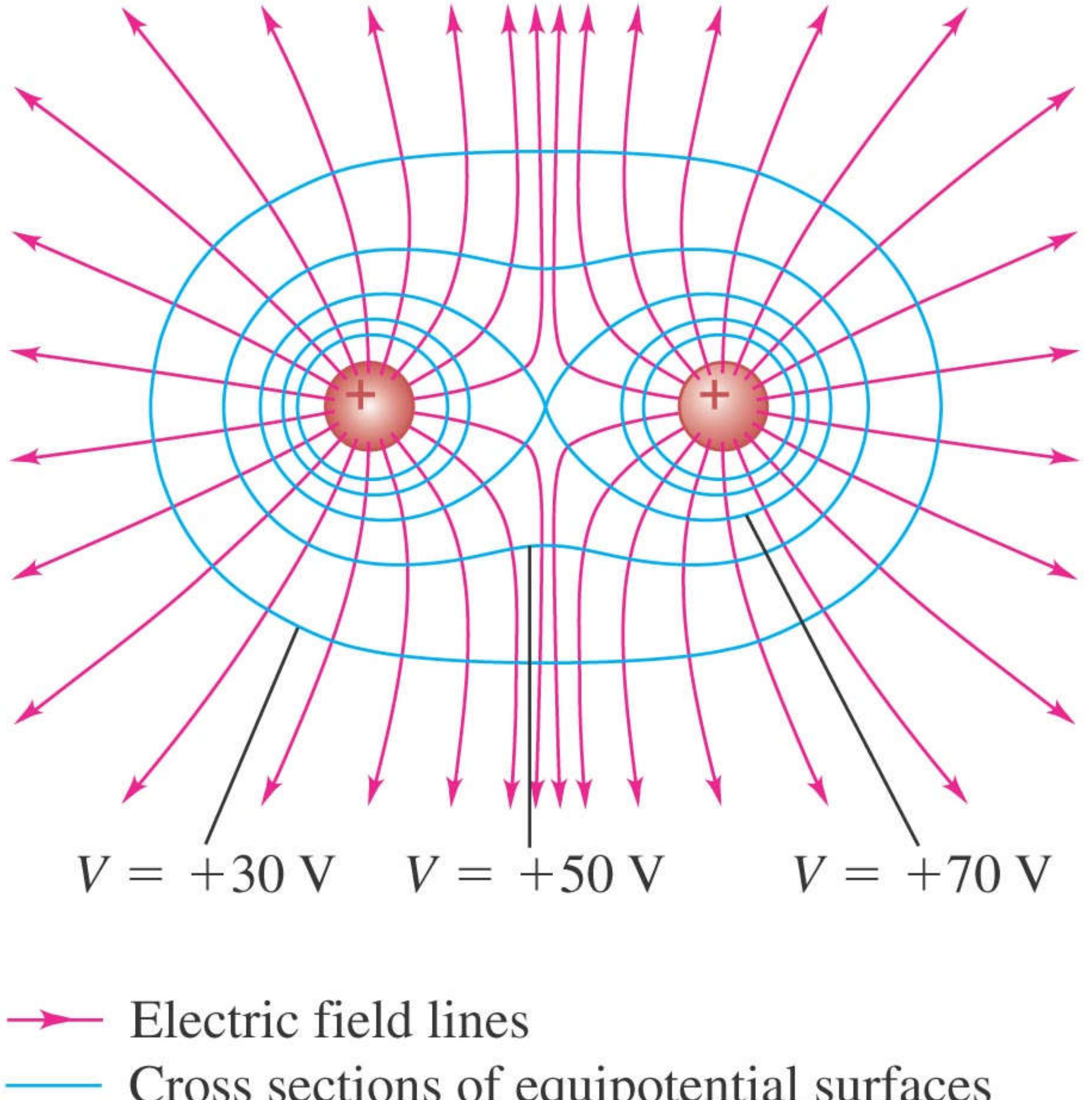
Høyest
1
3
2
Lavest





Graf fra øving 6
(Matlab eller Python)

To positive ladninger



(Y&F Fig 23.23)

Kap. 23: Oppsummering 1
Elektrisk potensial

Arbeid av el.kraft $q\vec{E}$ er kun avhengig av start-(a) og slutt (b) posisjon

$$\Updownarrow$$

Alle E-felt er konservative: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$

$$\Downarrow$$

Kan definere:

$$\text{Elektrisk potensial} = \frac{\text{elektrisk potensiell energi}}{\text{ladning}}$$

$$V_{\mathrm{ba}} = -\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V$$

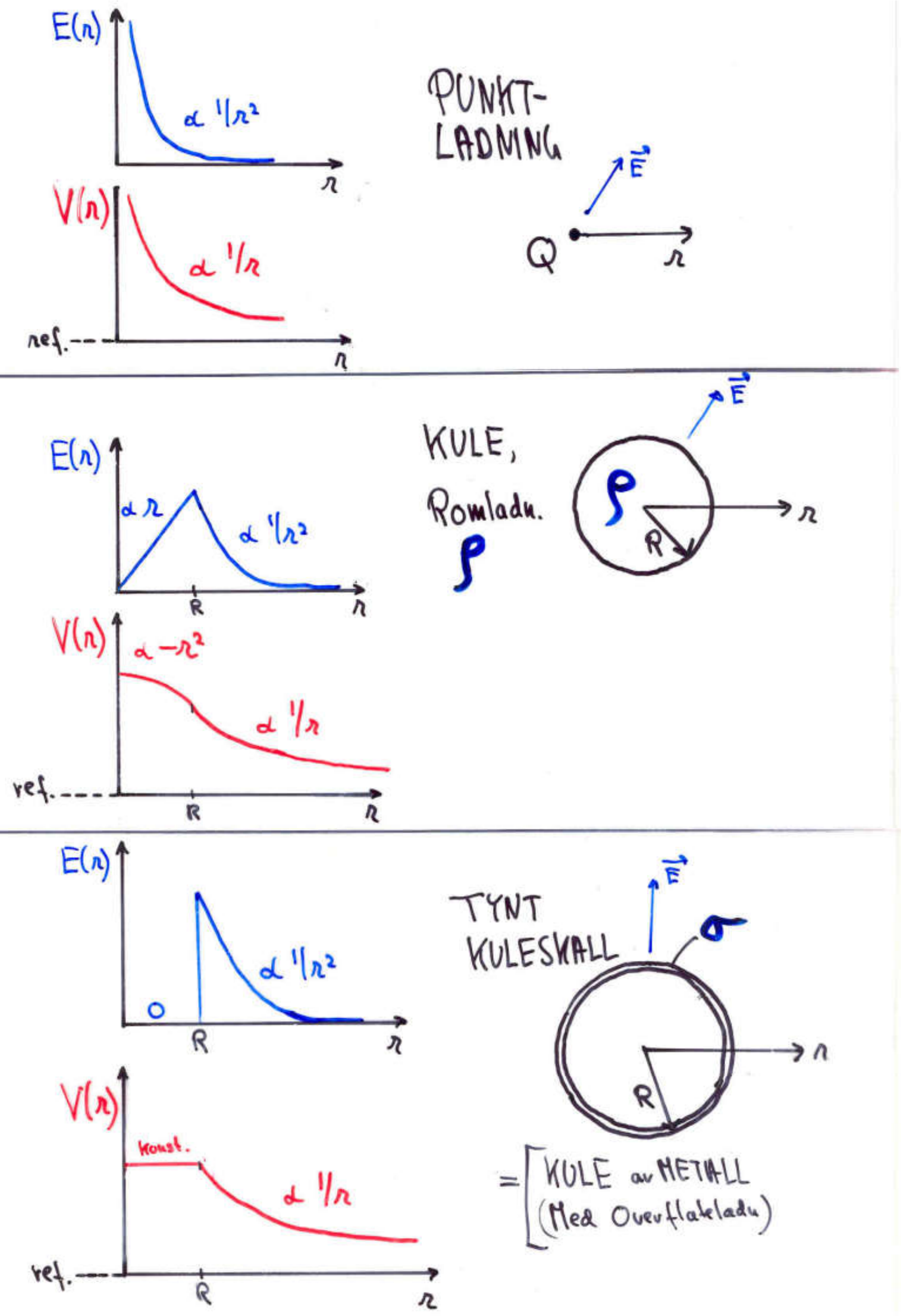
Enhet: $[V]$ = J / C = volt = V

Energienheter:

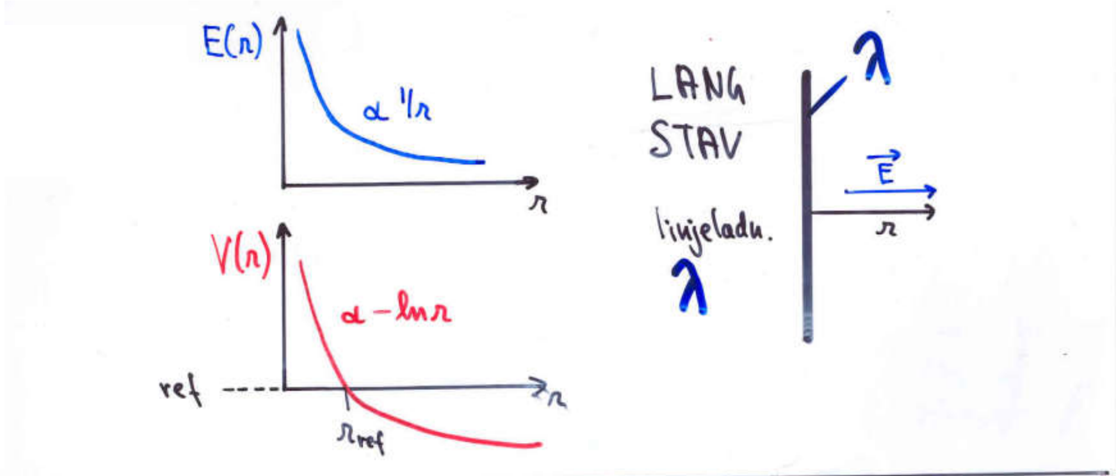
1 CV = tilleggsenergi for 1C ved å flytte 1 V høyere = 1 J
1 eV = tilleggsenergi for 1e ved å flytte 1 V høyere = 0,16 aJ

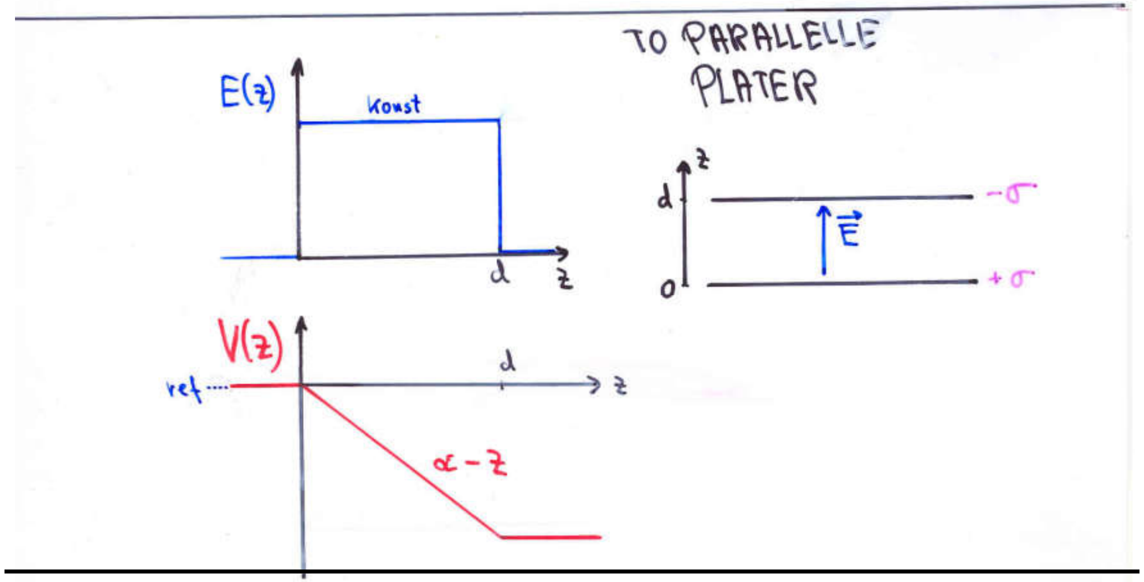
Absolutt potensial definert relativt $r = \infty$

E og *V* rundt ulike ladnings-samlinger



E og *V* rundt ulike ladnings-samlinger



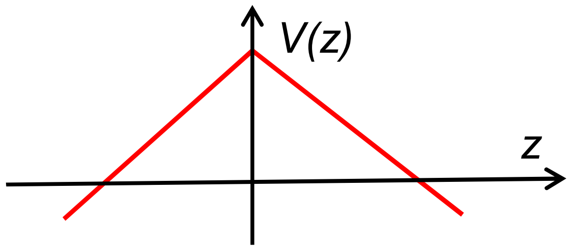


For alle:

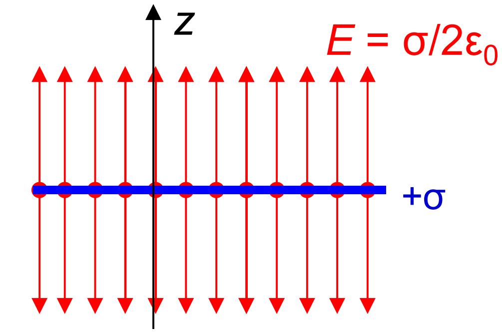
$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

$$E(z) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})}$$



NÆRME STOR PLATE



Kap. 23: Oppsummering 2
Elektrisk potensial

Beregning av potensial:

Metode 1: Superposisjon, romlig integrasjon: $V(r) = k \iiint \frac{\mathrm{d}q}{r}.$

Metode 2: Linjeintegral, når $\vec{E}$ er kjent: $V_{\mathrm{ba}} = -\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$

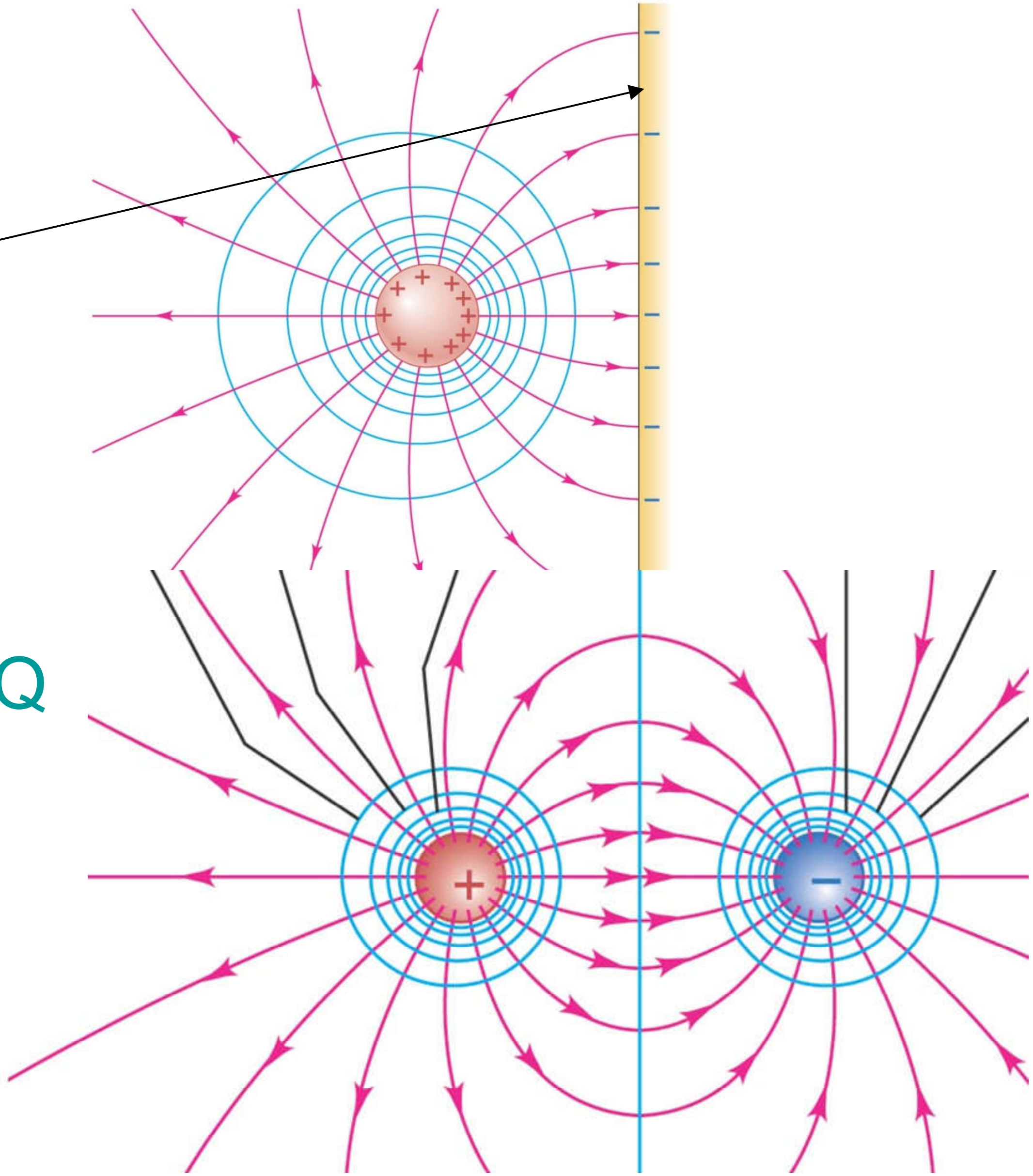
- **Løsningsmetodikk for *E* og *V*:**
  Hvis ***E*** enkel å finne (eks. fra Gauss' lov): Bestem ***E***, deretter *V* fra Metode 2.
  Hvis *V* enkel å finne (fra metode 1): Bestem *V*, deretter ***E*** fra ***E*** = grad *V*

- Ladninger kan flyttes uten arbeid på **ekvipotensialflater**.

- ***E*** er normal til ekvipotensialflater.

- Elektrisk **leder** er på en og samme potensialflate.

Lederflater er alltid ekvipotensialflater



For pkt.ladning nær lederflate er *E*-feltet som mellom +Q og –Q

Kalles speilingsmetoden

(Y&F Fig 23.24)